Les calculatrices sont autorisées

* * * * *

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

* * * * *

Problème 1

Dans ce problème, on s'intéresse à l'équation différentielle (E)

$$x(x-4)y' + (x-2)y = -2 \qquad (E)$$

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. On appelle solution de (E) sur l'intervalle I toute fonction $y : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I, telle que

$$\forall x \in I,\ x(x-4)y'(x) + (x-2)y(x) = -2$$

Par convention, on pose $0! = 1$.

Partie I. Etude de deux primitives.

1) Pour tout $x \in]0,4[$, on pose $A(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(4-t)}}$.

1.a) Trouver $\alpha > 0$ tel que, lorsque t tend vers 0^+, on ait $\dfrac{1}{\sqrt{t(4-t)}} \sim \dfrac{\alpha}{\sqrt{t}}$.
En déduire que l'intégrale impropre $A(x)$ est bien définie pour tout $x \in]0,4[$.

1.b) A l'aide du changement de variable $u = \sqrt{t}$, calculer $A(x)$ pour tout $x \in]0,4[$.
Montrer qu'il existe un réel $\beta > 0$ tel que

$$\forall x \in]0,4[,\ A(x) = \beta \arcsin\left(\frac{\sqrt{x}}{\beta}\right)$$

1.c) En déduire la limite de $A(x)$ lorsque x tend vers 0^+.

1.d) Donner un équivalent simple de $A(x)$ lorsque x tend vers 0^+.

2) Pour tout $x \in]-\infty,0[$, on pose $B(x) = \displaystyle\int_x^0 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(t-4)}}$.

2.a) Montrer que $B(x)$ est bien défini pour tout $x \in]-\infty,0[$.

2.b) A l'aide du changement de variable $u = \sqrt{-t} + \sqrt{4-t}$, calculer $B(x)$ pour tout $x \in]-\infty,0[$. Montrer qu'il existe un réel $\gamma > 0$ tel que

$$\forall x \in]-\infty,0[,\ B(x) = \gamma \ln\left(\frac{\sqrt{-x} + \sqrt{4-x}}{\gamma}\right)$$

2.c) En déduire que $\lim\limits_{x \to 0^-} B(x) = 0$.

2.d) Donner un équivalent simple de $B(x)$ lorsque x tend vers 0^-.

Partie II. Résolution de (E).

1) On note (H) l'équation homogène associée à (E).

1.a) Résoudre (H) sur l'intervalle $]-\infty, 0[$.

1.b) Résoudre (H) sur l'intervalle $]0, 4[$.

1.c) Résoudre (H) sur l'intervalle $]4, +\infty[$.

1.d) Montrer que la fonction constante égale à 0 est la seule solution de (H) sur $\mathbb{R}$ tout entier.

2) On étudie ici (E) sur $]0, 4[$.

2.a) Résoudre (E) sur $]0, 4[$. On exprimera les solutions à l'aide de la fonction A définie en **I.1)**.

2.b) Montrer que (E) possède une unique solution sur l'intervalle $]0, 4[$ possédant une limite finie à droite en 0.

On note f cette solution. Donner l'expression de $f(x)$, ainsi que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$.

3) On étudie ici (E) sur $]-\infty, 0[$.

3.a) Résoudre (E) sur $]-\infty, 0[$. On exprimera les solutions à l'aide de la fonction B définie en **I.2)**.

3.b) Montrer que (E) possède une unique solution sur l'intervalle $]-\infty, 0[$ possédant une limite finie à gauche en 0.

On note g cette solution. Donner l'expression de $g(x)$, ainsi que $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x)$.

4) On étudie ici (E) sur $]-\infty, 4[$.

4.a) Montrer qu'il existe une unique fonction h définie sur $]-\infty, 4[$ qui vérifie les trois conditions :

(1) la restriction de h à $]0, 4[$ est solution de (E) sur $]0, 4[$.

(2) la restriction de h à $]-\infty, 0[$ est solution de (E) sur $]-\infty, 0[$.

(3) h est continue en 0.

4.b) Pour tout $x \in]-\infty, 0[\cup]0, 4[$, on pose $T(x) = \frac{h(x)-h(0)}{x}$. Donner la limite l de $T(x)$ lorsque x tend vers 0^+.

On admettra que $T(x)$ tend aussi vers l lorsque x tend vers 0^-.

4.c) En déduire que (E) possède une unique solution sur l'intervalle $]-\infty, 4[$.

Préciser la valeur de cette fonction en 0, ainsi que la valeur de sa dérivée en 0.

5) L'équation (E) possède-t-elle une solution définie sur $\mathbb{R}$?

Tournez la page S.V.P.

Partie III. Etude d'une solution développable en série entière.

1) 1.a) On *suppose* ici que $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence strictement positif, solution de (E). Déterminer a_0 et trouver une relation de récurrence liant a_n et a_{n-1} $(n \geqslant 1)$.

1.b) Montrer que (E) possède une unique solution développable en série entière, sur un intervalle ouvert à préciser, que l'on notera encore $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Calculer son rayon de convergence R, et montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

2) Etude de la série numérique $\sum a_n(-R)^n$.

2.a) On pose $u_n = a_n R^n$ $(n \geqslant 0)$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

2.b) Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $v_n = -\ln(\frac{u_n}{u_{n-1}})$. Montrer que la série $\sum v_n$ est une série positive divergente.

2.c) En déduire la nature de la suite $(\ln(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$, puis que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

2.d) Montrer que la série $\sum a_n(-R)^n$ est convergente.

3) Etude de la série numérique $\sum a_n R^n$.

3.a) On rappelle que l'on note $u_n = a_n R^n$. Montrer que $\forall n \geqslant 1\ ,\ \frac{u_n}{u_{n-1}} > \frac{n}{n+1}$.

3.b) En déduire que $\forall n \geqslant 0\ ,\ u_n \geqslant \frac{1}{n+1}$.

3.c) Préciser alors la nature de la série $\sum a_n R^n$.

4) 4.a) Montrer que S et h coïncident sur $]-4, 4[$. On rappelle que h a été définie en **II.4.a)**.

4.b) Donner une expression simple de la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(-R)^n$.

Problème 2

Les parties **I** et **II** sont indépendantes, la partie **III** utilise les résultats des parties **II** et **III**, qui pourront être utilisés sans démonstration. *Dans ce cas, le candidat indiquera avec précision les résultats admis et utilisés.*

Attention aux notations, ainsi la lettre E désigne différents espaces vectoriels selon les parties du problème.

Partie I. Un peu d'algèbre linéaire dans $E = \mathbb{R}_5[X]$.

On note $E = \mathbb{R}_5[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 5. On désigne par e_k, où $0 \leq k \leq 5$, les vecteurs de la base canonique $\mathcal{B}$ de E, on a donc $e_k(X) = X^k$, et $\mathcal{B} = (e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$.
On note $E_1 = \text{Vect}(e_1, e_3, e_5)$ l'ensemble des polynômes impairs de E, et $E_2 = \text{Vect}(e_0, e_2, e_4)$ l'ensemble des polynômes pairs de E.

Remarque : on notera que E_1, E_2 et E sont trois espaces vectoriels distincts.

Préliminaires

1) Vérifier que $\mathcal{B}_1 = (e_1, e_3, e_5)$ est une base de E_1, et que $\mathcal{B}_2 = (e_0, e_2, e_4)$ est une base de E_2.

2) Montrer que E_1 et E_2 sont deux sous-espaces supplémentaires de E.

Etude d'applications linéaires

1) On considère l'application s qui à tout polynôme P de E_2, associe le polynôme $s(P)$ défini par :

$$s(P) = (X^2 - 1)P'' + XP'$$

1.a) Montrer que si P est un polynôme pair de E, alors son polynôme dérivé P' est un polynôme impair, et son polynômé dérivé second P'' est un polynôme pair.

1.b) Montrer que s définit un endomorphisme de E_2.

1.c) Donner la matrice S de s dans la base $\mathcal{B}_2$ de E_2.

1.d) En déduire le noyau de s, le spectre de s et les sous-espaces propres de s.

1.e) L'endomorphisme s est-il diagonalisable ?

Tournez la page S.V.P.

2) On considère l'application φ qui à tout polynôme P de E, associe le polynôme $\varphi(P)$ défini par :

$$\varphi(P) = 2XP - P'.$$

2.a) Montrer que φ est une application linéaire. Est-ce un endomorphisme de E ?

2.b) Déterminer le noyau et le rang de φ, puis une base de $\mathrm{Im}(\varphi)$.

3) On désigne par f la restriction de φ, au sous-espace vectoriel E_2. Montrer que f définit un isomorphisme de E_2 sur E_1.

Partie II. Etude d'un endomorphisme en dimension finie.

On désigne désormais par E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie, et par E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.
On note s un endomorphisme de E_2 et f une **application linéaire bijective** de E_2 dans E_1.

Pour tout x de E, vérifiant $x = x_1 + x_2$, avec $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$, on définit :

$$F(x) = f^{-1}(x_1) + f(x_2) + s(x_2).$$

1) 1.a) Donner la décomposition dans $E = E_1 \oplus E_2$ de l'élément $F(x)$.

1.b) Montrer que F est un endomorphisme de E.

1.c) Montrer que F est injective.

1.d) Soit y un élément de E, vérifiant $y = y_1 + y_2$, avec $y_1 \in E_1$, et $y_2 \in E_2$.
Prouver que $y = F(x)$, avec $x = f(y_2) + f^{-1}(y_1) - f \circ s \circ f^{-1}(y_1)$.

1.e) F est-elle bijective ?

2) 2.a) Dans l'ensemble de la question **2.a)** on suppose que F admet une valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$.

2.a.i) Vérifier qu'on a $\lambda \neq 0$.

2.a.ii) Soit x un vecteur propre associé à la valeur propre λ, vérifiant $x = x_1 + x_2$, où $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$. Montrer qu'on a alors :

$$\lambda f^{-1}(x_1) = x_2.$$

En déduire que x_1 et x_2 sont non nuls, puis que x_2 est un vecteur propre de s associé à une valeur propre que l'on exprimera en fonction de λ.

2.b) Réciproquement, soient μ une valeur propre réelle de l'endomorphisme s, et z_2 un vecteur propre de s associé à μ.
On définit $z_1 = f(z_2)$, et $z = k \cdot z_1 + z_2$, où $k \in \mathbb{R}$.
On veut déterminer à quelles conditions, le vecteur z ainsi défini, pourrait être un vecteur propre de F.

2.b.i) On suppose que z est vecteur propre de F associé à une valeur propre λ. Montrer alors que $k = \frac{1}{\lambda}$, et que λ est racine d'un trinôme admettant deux racines distinctes notées λ_1 et λ_2.

2.b.ii) Déterminer l'expression de λ_1 et λ_2 en fonction de la valeur propre μ.

2.b.iii) Déterminer pour chacune des valeurs λ_1 et λ_2, un vecteur propre de F associé à cette valeur propre.

2.c) Soient $u_1, \cdots, u_k$, k vecteurs propres de s, associés à la même valeur propre μ de s, et formant une famille libre. Soit λ, l'une des deux valeurs propres de F déterminée comme en **2.b)** A partir de chaque vecteur u_i, on détermine un vecteur propre v_i de F, associé à λ, calculé comme en **2.b)**.
Montrer que les vecteurs $v_1, \cdots, v_k$ sont linéairement indépendants.

3) 3.a) Prouver que $\dim(E_1) = \dim(E_2)$, et que $\dim(E) = 2\dim(E_2)$.

3.b) On suppose que s admet p valeurs propres réelles distinctes $\mu_1, \cdots, \mu_p$. Prouver que F admet exactement $2p$ valeurs propres réelles distinctes.

3.c) Montrer que si s est diagonalisable, alors F l'est aussi.
Indication : on pourra raisonner sur les dimensions des sous-espaces propres, ou exhiber des bases de vecteurs propres.

Tournez la page S.V.P.

Partie III. Deux applications.

1) Première application :

Dans cette question, $E = \mathbb{R}_5[X]$, et f et s désignent les applications définies dans la partie **I**.
Déterminer les valeurs propres de l'application F correspondante, où F est définie comme dans la partie **II**.

2) Deuxième application :

Dans cette question, E est un espace vectoriel de dimension 6, muni d'une base $\mathcal{B}$, avec $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6)$. On veut appliquer les résultats de la partie **III.** au cas de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit F l'endomorphisme de E, représenté par A dans la base $\mathcal{B}$, on a donc : $\mathrm{Mat}(F, \mathcal{B}) = A$.

2.a) Déterminer deux sous-espaces supplémentaires E_1 et E_2, ainsi que deux applications s et f, permettant d'appliquer les résultats obtenus à la partie **II**.

2.b) La matrice A est-elle diagonalisable ?

Fin de l'énoncé